Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Ганеев Винер Валиахметович
Должность: Директор
Дата подписания: 02.11.2026 14:28:19
Уникальный программный ключ:
fceab25d7092f3bff743e8ad3f8d57fddc1f5e66

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»

Бирский филиал

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
подписано ЭЦП Гайсин Ф.Р.
(подпись, инициалы, фамилия)

«26» 02 2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Элементы функционального анализа
(наименование дисциплины)

ОПОП ВО программа бакалавриата
01.03.02 Прикладная математика и информатика
шифр и наименование направления подготовки (специальности)

направленность (профиль, специализация)

Математическое моделирование и управление процессами и системами
наименование направленности (профиля, специализации)

форма обучения
очная
(очная, очно-заочная, заочная)

Бирск 2026 г.

Рабочая программа составлена на основании учебного плана основной профессиональной образовательной программы 01.03.02 Прикладная математика и информатика профиль Математическое моделирование и управление процессами и системами, одобренного ученым советом Бирского филиала Уфимского университета науки и технологий (протокол №7 от 27.02.2026 г.) и утвержденного директором Бирского филиала 27.02.2026.

Зав.кафедрой кафедры высшей математики и физики *(наименование кафедры разработчика программы)*	*подписано ЭЦП*	Чудинов В.В.
Разработчик программы	*подписано ЭЦП*	Чудинов В.В.
Руководитель образовательной программы	*подписано ЭЦП*	Бигаева Л.А.

1. Цель дисциплины. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения основной профессиональной образовательной программы

1.1. Цель дисциплины

Цель изучения дисциплины: формирование представлений о понятиях и методах теории функционального анализа о теории меры и интеграла Лебега и вариационного исчисления, умений и навыков в области функционального анализа для достижения личностных и предметных результатов обучения.

1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения основной профессиональной образовательной программы

Таблица 1. – Результаты обучения по дисциплине

Планируемые результаты освоения основной профессиональной образовательной программы (компетенции, закрепленные за дисциплиной)		Код и наименование индикатора достижения компетенции, закрепленного за дисциплиной
код компетенции	наименование компетенции	
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.
		ОПК-1.2. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.
		ОПК-1.3. Применяет фундаментальные знания для решения практических задач и использует их в профессиональной деятельности.

2. Структура и трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость (объем) дисциплины составляет 3 зачетные единицы (з.е.), 108 академических часов.

Таблица 2 – Объем дисциплины

Виды учебной работы	Всего, часов	Количество часов в семестре
Общая трудоемкость дисциплины	108	4 семестр - 108
Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий (всего)	54	4 семестр - 54

Виды учебной работы	Всего, часов	Количество часов в семестре
в том числе:		
лекции	24	4 семестр - 24
лабораторные занятия	0	
практические занятия	30	4 семестр - 30
Другие виды работ в соответствии с УП:		
контрольная работа	0	
консультации	0	
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	54	4 семестр - 54
Из них:		
контроль	0	
ФКР:		
зачет	0	
зачет с оценкой	0.2	4 семестр - 1
курсовая работа (проект)	0	
экзамен	0	

3 Содержание дисциплины

Таблица 3 – Содержание дисциплины

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Виды деятельности				Форма текущего контроля успеваемости
		Лек, час.	П, час.	ДЗ, час.	СРС, час.	
2 курс / 4 семестр						
1	Топологические пространства Определение и примеры топологических пространств. Сравнение топологий. База. Непрерывные отображения топо-логических пространств. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости.	4	4		8	Коллоквиум
2	Нормированные пространства Линейные пространства. Изоморфные пространства. Линейная зависимость. Подпространства. Линейные функци-оналы. Нормированные пространства. Непрерывные линей-ные операторы. Линейные пространства со скалярным произ-ведением. Характеристическое свойство евклидовых про-странств. Выпуклые множества и выпуклые тела в линейном пространстве. Однородно-выпуклые функционалы в линейном пространстве. Функционал Минковского. Теорема Хана-Банаха. Отделимость выпуклых множеств в линейном про-странстве.	4	4		8	Коллоквиум
3	Метрические пространства	4	4		8	Коллоквиум

	Определение и примеры метрических пространств. Не-прерывные отображения метрических пространств. Изомет-рия. Предельные точки. Замыкание. Сходимость. Плотные подмножества. Открытые и замкнутые множества. Полные метрические пространства. Пополнение. Принцип сжимающих отображений.					
4	Элементы дифференциального исчисления в банаховых прострaствах Сильный дифференциал. Слабый дифференциал. Производная Фреше. Производная Гато.	4	6		8	Коллоквиум
5	Элементы вариационного исчисления Примеры функционалов. Основные леммы вариацион-ного исчисления. Необходимые условия слабого экстремума. Вариационная задача для функционалов, зависящих от не-скольких аргументов. Функция Гамильтона. Уравнения Га-мильтона-Якоби. Вариационная задача для функционалов, содержащих высшие производные. Вариационная задача для функционалов, являющихся кратными интегралами.	4	6		10	Коллоквиум
6	Линейные функционалы. Линейные операторы Непрерывные линейные функционалы в линейном топологическом пространстве. Линейные функционалы в нормированных пространствах. Примеры линейных функционалов. Теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве. Определение сопряженного пространства. Сильная топология в сопряженном пространстве. Линейные операторы в линейных топологических пространствах. Линейные операторы в нормированных пространствах. Сумма и произведение операторов. Обратный оператор, обратимость.	4	6		11.8	Коллоквиум
7	Дифференцированный зачет			1	0.2	
Итого по 2 курсу 4 семестру		24	30	1	54	
Итого по дисциплине		24	30	1	54	

Таблица 4 – Практические (семинарские) занятия

№ п/п	Наименование семинарских и практических работ	Объем, час.

4. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины. Баллы, выставляемые за конкретные виды деятельности представлены ниже.

Контрольные задания для проведения текущего контроля успеваемости

Контрольная работа

Контрольная работа № 2.

1) Доказать, что энергетическое пространство H_u оператора U есть пространство Соболева H^0_1 [a, b], где U: $L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, $Ux(t) = -d^2x/dt^2$, с областью определения $D(U) = \{x(t) \in L_2[a, b]: x(t) \in C^2[a, b], x(a) = x(b) = 0\}$

2) Доказать, что оператор U является положительным

3) Доказать, что оператор U является положительно определенным

Контрольная работа № 1.

1) Доказать, что функционалы в пространстве C[-1, 1] являются линейными непрерывными, и найти их нормы:

а) $f(x) = (1/3)[x(-1)+x(1)]$;

б) $f(x) = 2[x(1) - x(0)]$;

3) Доказать, что в пространстве $L_1[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой.

4) Пусть x_n, x, y_n, $y \in X$ ($n \in N$). Доказать, что если $x_n \rightarrow x$, то x_n - ограниченная последовательность

5) Доказать, что $\operatorname{diam} S_r(x_0)=2r$

6) Доказать, что множество ступенчатых функций является выпуклым и всюду плотным в пространстве $L_2[a, b]$

Методические материалы для контрольной работы

Описание методики оценивания: при оценке выполнения студентом контрольной работы максимальное внимание следует уделять следующим аспектам: насколько полно в теоретическом вопросе раскрыто содержание материала, четко и правильно даны определения, раскрыто содержание понятий; верно использованы научные термины; демонстрируются высокий уровень умения оперировать научными категориями, анализировать информацию, владение навыками практической деятельности; кейс-задание решено на высоком уровне, содержит аргументацию и пояснения.

Критерии оценки (в баллах):

- **5** баллов выставляется студенту, если в теоретическом вопросе полно раскрыто содержание материала; четко и правильно даны определения, раскрыто содержание понятий; верно использованы научные термины; демонстрируются высокий уровень умения оперировать научными категориями, анализировать информацию, владение навыками практической деятельности; кейс-задание решено на высоком уровне, содержит пояснения; тестовые задания решены свыше, чем на 80%; уровень знаний, умений, владений – высокий;
- **4** балла выставляется студенту, если В теоретическом вопросе раскрыто основное содержание материала; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины;

ответ самостоятельный; определения понятий неполные, допущены незначительные нарушения в последовательности изложения; небольшие недостатки при использовании научных терминов; кейс-задание решено верно, но решение не доведено до завершающего этапа; тесты решены на 60-80%. Уровень знаний, умений, владений – средний;
- **3** балла выставляется студенту, если в теоретическом вопросе усвоено основное, но непоследовательно; определения понятий недостаточно четкие; не использованы в качестве доказательства выводы и обобщения из наблюдений, практических занятий; уровень умения оперировать научными категориями, анализировать информацию, владения навыками практической деятельности невысокий, наблюдаются пробелы и неточности; в решение кейс-задания верно выполнены некоторые этапы; тесты решены на 40-60%; уровень знаний, умений, владений – удовлетворительный;
- **менее 3** баллов выставляется студенту, если в теоретическом вопросе не изложено основное содержание учебного материала, изложение фрагментарное, не последовательное; определения понятий не четкие; не использованы в качестве доказательства выводы и обобщения из наблюдений, уровень умения оперировать научными категориями, анализировать информацию, владения навыками практической деятельности очень низкий; тесты решены менее, чем на 40 %; уровень знаний, умений, владений – недостаточный.

Коллоквиум

Описание методики оценивания выполнения коллоквиума: внимание уделяется усвоению учебного материала, полноте и логике излагаемого материала, умению оперировать научными категориями, владению приемами и навыками выполнения практических заданий (при наличии).
Вопросы к коллоквиуму
1. Основные классы пространств.
2. Метрические пространства.
3. Принцип сжимающих отображений.
4. Топологические пространства.
5. Линейные нормированные пространства.
6. Гильбертовы пространства.
7. Элементы теории линейных операторов.
8. Сопряженные пространства.
9. Основные принципы функционального анализа.
10. Вполне непрерывные операторы в нормированном пространстве.
11. Спектральная теория самосопряженных операторов.
12. Мера Лебега.

Методические материалы для коллоквиума

Критерии оценки

5 баллов выставляется студенту, если он демонстрирует глубокое и прочное усвоение программного материала, полные, последовательные, грамотные и логически излагаемые ответы при видоизменении задания; свободно справляющиеся с поставленными задачами, знания материала, правильно обоснованные принятые решения, владение разносторонними навыками и приемами выполнения практических работ.
4 балла выставляется студенту, если он демонстрирует знание программного материала, грамотное изложение, без существенных неточностей в ответе на вопрос, правильное применение теоретических знаний, владение необходимыми навыками при выполнении практических задач.
3 баллов выставляется студенту, если он демонстрирует усвоение основного материала, но при ответе допускаются неточности, при ответе недостаточно правильные формулировки, нарушение последовательности в изложении программного материала, - затруднения в выполнении практических заданий;

0-2 баллов выставляется студенту, если он демонстрирует не знание программного материала, при ответе возникают ошибки, затруднения при выполнении практических работ.

Дифференцированный зачет

Примерные вопросы к дифзачету, 2 курс / 4 семестр

1. Основные классы пространств.
2. Метрические пространства.
3. Принцип сжимающих отображений.
4. Топологические пространства.
5. Линейные нормированные пространства.
6. Гильбертовы пространства.
7. Элементы теории линейных операторов.
8. Сопряженные пространства.
9. Основные принципы функционального анализа.
10. Вполне непрерывные операторы в нормированном пространстве.
11. Спектральная теория самосопряженных операторов.
12. Мера Лебега.
13. Интеграл Лебега.
14. Основы вариационного исчисления.
15. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.
16. Интегральные операторы.
17. Пространства Соболева.
18. Обобщенные функции.
19. Сильная (по Фреше) дифференцируемость отображений в банаховых про-странствах.
20. Слабая (по Гато) дифференцируемость отображений в банаховых про-странствах.
21. Дифференциалы Фреше и Гато.
22. Уравнения Эйлера.
23. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха – Штейнгауза).
24. Теорема Рисса – Фишера.

Методические материалы для дифференцированного зачета

При оценке ответа на дифференцированном зачете максимальное внимание должно уделяться тому, насколько полно раскрыто содержание материала, четко и правильно даны определения, раскрыто содержание понятий, верно ли использованы научные термины, насколько ответ самостоятельный, использованы ли ранее приобретенные знания, раскрыты ли раскрыты причинно-следственные связи, насколько высокий уровень умения оперирования научными категориями, анализа информации, владения навыками практической деятельности.
Критерии оценки (в баллах):
- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;
- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;
- **10-16** баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов.

Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;
- 1-10 баллов выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:
- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Задания для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме:

4 семестр - дифзачет.

Проверяемыми на промежуточной аттестации элементами содержания являются темы дисциплины.

Для проверки *знаний* используются вопросы и задания в различных формах.

Умения, навыки (или опыт деятельности) и компетенции проверяются с помощью компетентностно-ориентированных задач (ситуационных, производственных или кейсового характера) и различного вида конструкторов.

Все задачи являются многоходовыми. Некоторые задачи, проверяющие уровень сформированности компетенций, являются многовариантными. Часть умений, навыков и компетенций прямо не отражена в формулировках задач, но они могут быть проявлены обучающимися при их решении.

В каждый вариант включаются задания по каждому проверяемому элементу содержания во всех перечисленных выше формах и разного уровня сложности. Такой формат позволяет объективно определить качество освоения обучающимися основных элементов содержания дисциплины и уровень сформированности компетенций.

Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине при использовании модульно-рейтинговой системы

Критериями оценивания при модульно-рейтинговой системе являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины:

Шкалы оценивания:

Рейтинг-план дисциплины

Таблица перевода баллов текущего контроля в баллы рейтинга

	5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	3	2	2	1	1	1	1	1	1
2		5	4	3	2	2	2	2	2	1
3			5	4	3	3	3	2	2	2
4				5	4	4	3	3	3	2

5					5	5	4	4	3	3
6						5	5	4	4	3
7							5	5	4	4
8								5	5	4
9									5	5
10										5

Рейтинг-план дисциплины представлен в Приложении 1.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1. Основная учебная литература

1. Функциональный анализ : учеб. пособ. для бакалавров, обуч. по напр. "Математика", "Математика и компьютерные науки", "Механика и матем. моделирование" и "Фундаментальная информатика и информационные технологии"; в 2-х т. Т.1 / В. А. Треногин , Б. М. Писаревский , Т. С. Соболева .— Москва : Академия, 2012 .— 240 с.
2. Функциональный анализ : учеб. пособ. для бакалавров, обуч. по напр. "Математика", "Математика и компьютер. науки", "Механика и матем. моделирование" и "Фундамент. информатика и информ. технологии"; в 2-х т. Т.2 / В. А. Треногин , Б. М. Писаревский , Т. С. Соболева .— Москва : Академия, 2013 .— 231 с.

5.2. Дополнительная учебная литература

1. Власова, Е.А. Элементы функционального анализа : учебное пособие / Е.А. Власова, И.К. Марчевский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 400 с. https://e.lanbook.com/book/67481
2. Функциональный анализ : учебное пособие / В. Р. Мукимов ; Федер. агенство по образ., ГОУ ВПО, БирГСПА .— Бирск : БирГСПА, 2009 .— 172 с.

5.3. Другие учебно-методические материалы

Перечень рекомендуемых ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», находящихся в свободном доступе

1. Интернет-библиотека Московского Центра непрерывного математического образования: http://ilib.mccme.ru
2. Большая Научная Библиотека: http://www.sci-lib.com

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elibrary.ru/.
2. Электронная библиотечная система «Лань» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://

e.lanbook.com/.

3. Университетская библиотека онлайн biblioclub.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/.
4. Электронная библиотека УУНиТ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bashedu.ru/.
5. Российская государственная библиотека [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.rsl.ru/.
6. Национальная электронная библиотека [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://xn--90ax2c.xn--p1ai/viewers/.
7. Национальная платформа открытого образования npoed.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://npoed.ru/.
8. Электронное образование Республики Башкортостан [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://edu.bashkortostan.ru/.
9. Информационно-правовой портал Гарант.ру [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.garant.ru/.

Программное обеспечение

1. Браузер Google Chrome - Бесплатная лицензия https://www.google.com/intl/ru_ALL/chrome/privacy/eula_text.html
2. LIBREOFFICE - Договор №0301400003023000002 от 14.03.2023 (бессрочный)
3. Операционная система Astra Linux - Договор 0301400003023000002 от 14 марта 2023 бессрочно

7. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Аудитория 301 Читальный зал (электронный каталог)(ФМ)	Для самостоятельной работы	Компьютер, мебель, принтер, сканер hp scanyet g2410. Программное обеспечение 1. Браузер Google Chrome 2. LIBREOFFICE
Аудитория 312 а(ФМ)	Для хранения оборудования	Учебно-наглядные материалы, экран.
Аудитория 405(ФМ)	Лекционная, Семинарская, Для консультаций, Для контроля и аттестации	Мебель, ноутбук, проектор, экран. Программное обеспечение 1. LIBREOFFICE 2. Операционная система Astra Linux 3. Браузер Google Chrome
Аудитория 420(ФМ)	Для самостоятельной работы	Компьютер, мебель, нетбук, принтер, проектор, сканер mustek, учебно-методические

		пособия, учебно-наглядные материалы, экран. Программное обеспечение 1. LIBREOFFICE 2. Операционная система Astra Linux 3. Браузер Google Chrome